

A interseção entre a matemática das cônicas e a observação astronômica da sombra de um gnômon

Fernando Siqueira da Silva

Universidade Federal do Pampa, fernandoda@unipampa.edu.br

Pedro Antonio Ourique

Universidade Federal de Pelotas, pedro.ourique@ufpel.edu.br

Carlos Maximiliano Dutra

Universidade Federal do Pampa, carlosdutra@unipampa.edu.br

Francisco Catelli

Universidade de Caxias do Sul, fcatelli@ucs.br

Odilon Giovannini

Universidade de Caxias do Sul, ogiovannini@gmail.com

Introdução

Conforme a Base Nacional Comum Curricular - BNCC (Brasil, 2018) a temática envolvendo a observação da sombra de uma vara (gnômon) é sugerida ao Ensino de Ciências entre o 4º e 6º anos do Ensino Fundamental, na área das Ciências da Natureza, dentro da unidade temática 'Terra e Universo', a partir da qual se pode determinar os quatro pontos cardeais e fazer inferências sobre o movimento da sombra, ao longo do dia e do ano, para compreensão do movimento diário do Sol (Silva; Catelli; Dutra, 2021).

Por outro lado, o documento oficial (Brasil, 2018) sugere que a temática sobre as cônicas

deve ser trabalhada na escola a partir do ensino médio, na área da ‘Matemática e suas Tecnologias’, momento em que se deve buscar “a consolidação, a ampliação e o aprofundamento das aprendizagens essenciais desenvolvidas no Ensino Fundamental” (Brasil, 2018, 529).

Essas são temáticas que apesar de envolverem o desenvolvimento de distintas habilidades e competências, em seus respectivos anos e áreas, podem ser trabalhadas no ensino médio de modo contextualizado e interdisciplinar.

Portanto, neste texto, buscamos correlacionar uma temática destinada ao ensino médio, seções cônicas, com uma temática aprendida no ensino fundamental, a sombra de um gnômon. Temáticas que aparecem um tanto dissociadas na BNCC, mas que podem ser abordadas de forma contextualizada e numa perspectiva interdisciplinar.

Assim, devido à conceituação matemática envolvida, é importante relacionarmos as cônicas e a sombra do gnômon para trabalharmos algumas habilidades e competências envolvendo ‘geometria e medidas’ no ensino médio.

No texto que segue, primeiramente, apresenta-se uma breve revisão histórica acerca do gnômon como um instrumento astronômico para, em seguida, abordar a relação entre as seções cônicas e a sombra de um gnômon por meio do software GeoGebra.

O mais antigo instrumento astronômico: gnômon

Acredita-se que um dos instrumentos astronômicos mais antigos e rudimentares já inventados pelo homem é o gnômon. Os egípcios foram um dos primeiros povos antigos a contabilizar o diurno observando a sombra solar em um gnômon, que nada mais é do que uma estaca vertical fincada ao solo. Conforme Silva (2021) as primeiras tabelas para a duração do período diurno e os primeiros relógios solares foram construídos com base na observação dessa sombra solar projetada.

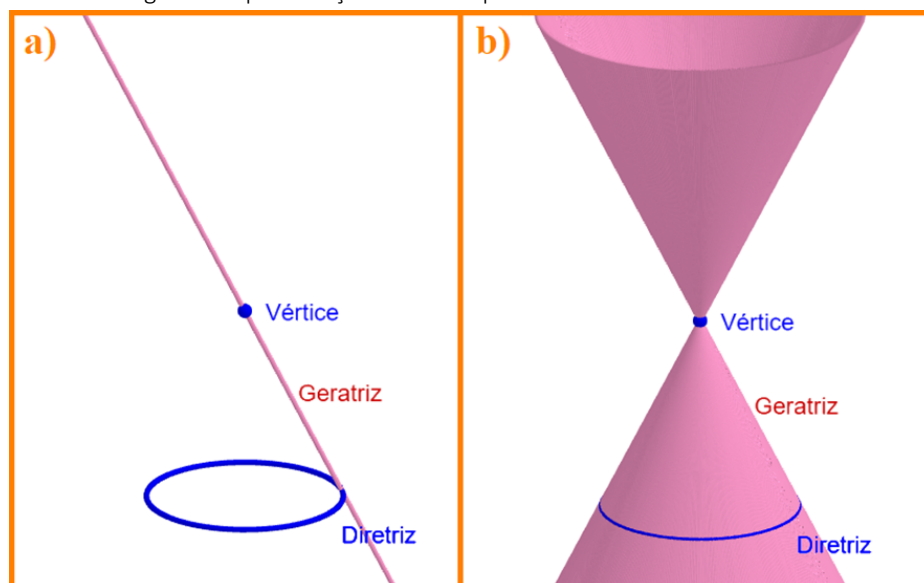
É bem provável que, já antes do início do grande calendário da civilização, o homem tivesse eleito duas linhas fundamentais de referência: o primeiro meridiano, que liga os pontos norte e sul do horizonte (**indicado pela sombra solar ao meio-dia**) e outra linha perpendicular a ele, que liga os pontos leste e oeste. A descoberta dessas duas referências foi o primeiro problema matemático da experiência social da humanidade. (Hogben, 1970, p. 55, grifo nosso).

A pergunta que o leitor deve estar se fazendo: o que a sombra de uma vara tem a ver com essas curvas, originadas na interseção de um plano com um cone? Para responder a essa pergunta, primeiramente, precisamos definir o que são as seções cônicas. E, esse é um saber matemático muito antigo, sendo melhor desenvolvido e sistematizado pelo astrônomo e matemático grego Apolônio de Perga, entre 262 a 190 a.C., cerca de um século e meio depois desses tipos de curvas terem sido estudadas, inicialmente, por Aristeu e Euclides (Boyer, 1996). Para entendermos como são essas curvas, as cônicas, precisamos compreender antes o que são superfícies cônicas.

Superfície Cônica e Cônicas

Uma superfície cônica é gerada da seguinte maneira: tomamos uma circunferência, denominada diretriz, e um ponto fixo V , denominado vértice, que não pertence ao plano que contém a diretriz. Tomamos uma reta, denominada geratriz, que passa por V e, ao mesmo tempo, é tangente à diretriz (Figura 1a). Fazemos então essa reta se deslocar sobre essa circunferência. A Figura 1b ilustra uma superfície cônica gerada dessa maneira.

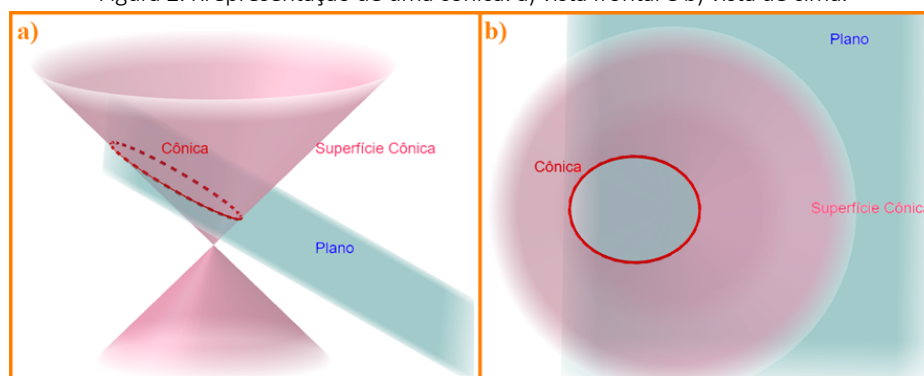
Figura 1. Representação de uma superfície cônica e seus elementos.



Fonte: elaborado pelos autores com o *software* GeoGebra.

Cônicas são curvas geradas na intersecção de um plano com uma superfície cônica, conforme mostrado na Figura 2.

Figura 2. Rrepresentação de uma cônica: a) vista frontal e b) vista de cima.

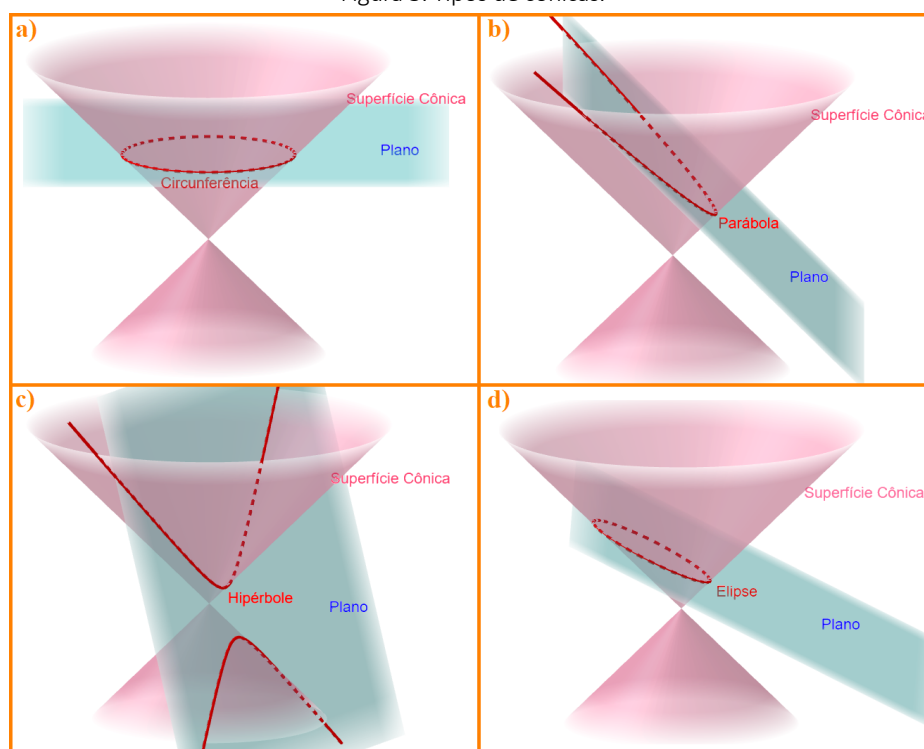


Fonte: elaborado pelos autores com o *software* GeoGebra.

Tipos de Cônicas

- **Circunferência:** curva gerada pela intersecção de um plano paralelo com a base da superfície cônica (Figura 3a).
- **Parábola:** curva gerada quando um plano intercepta uma superfície cônica com uma inclinação paralela a uma de suas geratrizes (Figura 3b).
- **Hipérbole:** curva obtida através da intersecção de um plano não paralelo a uma das geratrizes e que, além disso, intercepta as duas folhas da superfície cônica (Figura 3c).
- **Elipse:** curva gerada quando a superfície cônica é intersectada por um plano não paralelo a uma das geratrizes e que, além disso, corte apenas uma das folhas da superfície cônica (Figura 3d).

Figura 3. Tipos de cônicas.

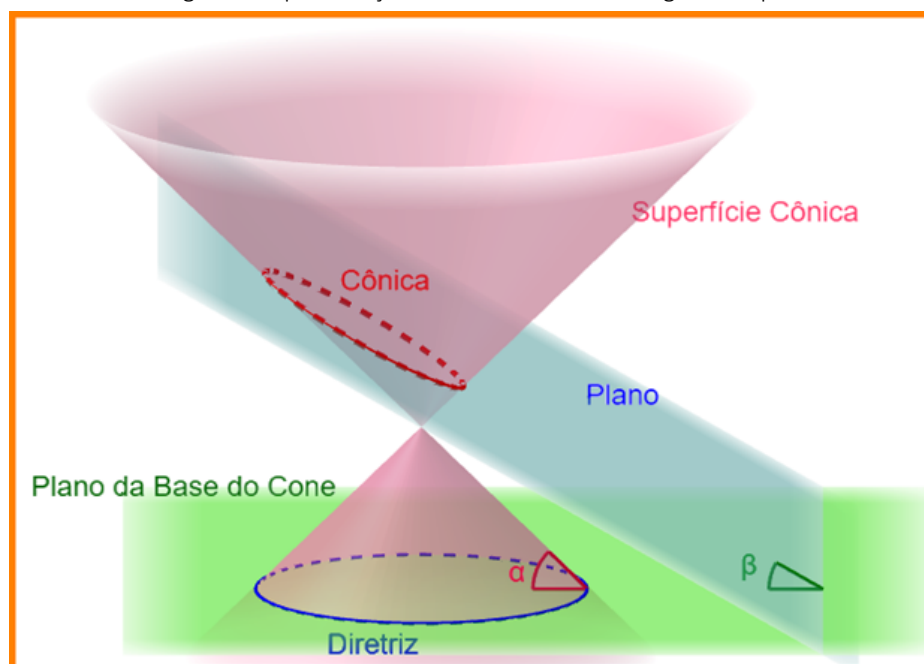


Fonte: elaborado pelos autores com o *software* GeoGebra.

As cônicas podem ser definidas por sua excentricidade, um parâmetro que mede o desvio de uma cônica em relação a uma circunferência. A excentricidade de uma circunferência é igual a 0; de uma elipse, é superior a 0 e inferior a 1; de uma parábola, é igual a 1; e de uma hipérbole, é superior a 1.

Sabendo dessas propriedades das cônicas e inserindo um plano contendo a diretriz, podemos definir essas curvas simplesmente comparando os valores dos ângulos α (ângulo formado entre as geratrizes e o plano da base do cone) e β (ângulo formado entre o plano que intercepta a superfície cônica e o plano da base do cone), conforme apresentado na Figura 4.

Figura 4. Representação de uma cônica e seus ângulos α e β .



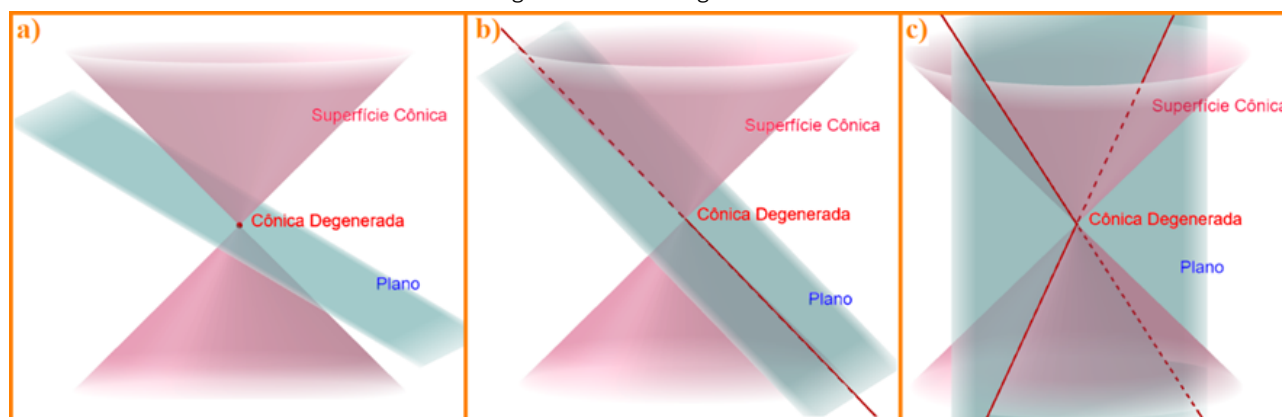
Fonte: elaborado pelos autores com o *software* GeoGebra.

Assim, temos a circunferência na qual o plano que intercepta a superfície cônica é paralelo ao plano da base do cone. Na elipse: $\beta < \alpha$. Na parábola: $\alpha = \beta$. Na hipérbole: $\beta > \alpha$.

Cônica degenerada

Se o plano que intercepta a superfície cônica passar na origem teremos uma cônica 'degenerada' a qual pode ser um ponto (Figura 5a), uma reta (Figura 5b) ou duas retas concorrentes (Figura 5c).

Figura 5. Cônicas degeneradas.

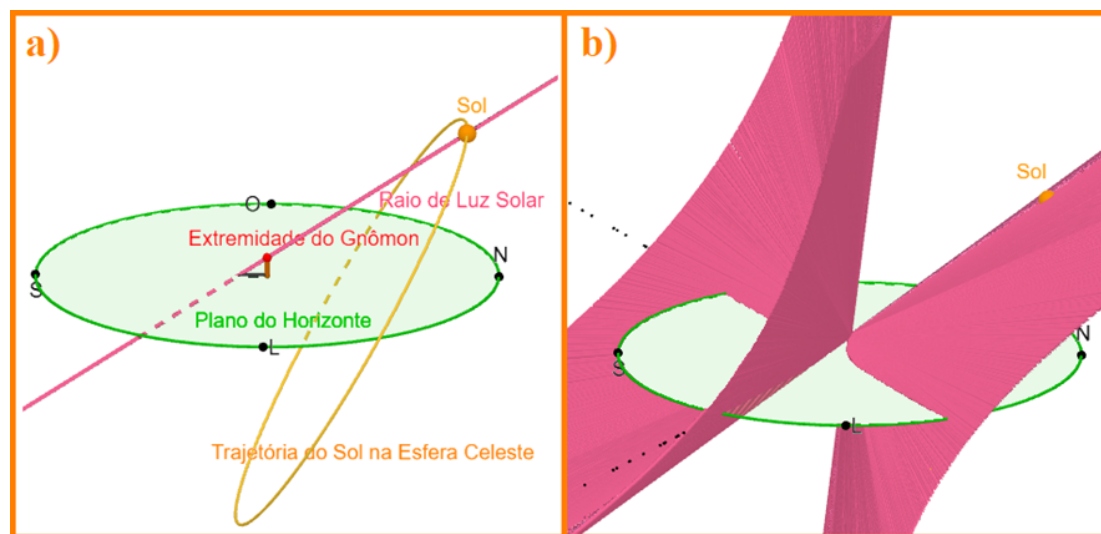


Fonte: elaborado pelos autores com o *software* GeoGebra.

A sombra de um gnômon: uma simulação com o *software* GeoGebra¹

A fim de verificarmos o comportamento da sombra de um gnômon (Catelli *et al.*, 2022) criamos um modelo virtual no *software* GeoGebra (Figura 6). Tendo em vista o conhecimento sobre as cônicas e como elas são formadas, identificamos que as curvas geradas pelo movimento da sombra do gnômon desse modelo virtual, tratava-se de cônicas. A Figura 6a apresenta os principais elementos do **modelo virtual do movimento das sombras** e a relação entre os elementos das cônicas descritos anteriormente, na Figura 1. Com esse artefato virtual visualizamos as seguintes relações analógicas: a trajetória diária do Sol na esfera celeste como sendo a diretriz da superfície cônica; o raio de luz solar sendo a geratriz da superfície cônica; a extremidade do gnômon, o vértice; e o plano do horizonte, o plano que intercepta a superfície cônica. Embora saibamos que a superfície da Terra não é plana, em regiões pequenas, como a região em que se projeta a sombra de um gnômon, elas podem ser consideradas planas.

Figura 6. Representação do modelo virtual da sombra de um gnômon: a) Representações analógicas: trajetória diária do Sol = diretriz; raio solar = geratriz; extremidade do gnômon = vértice; plano do horizonte = plano. b) Representação da superfície cônica gerada pelo movimento diário do Sol.

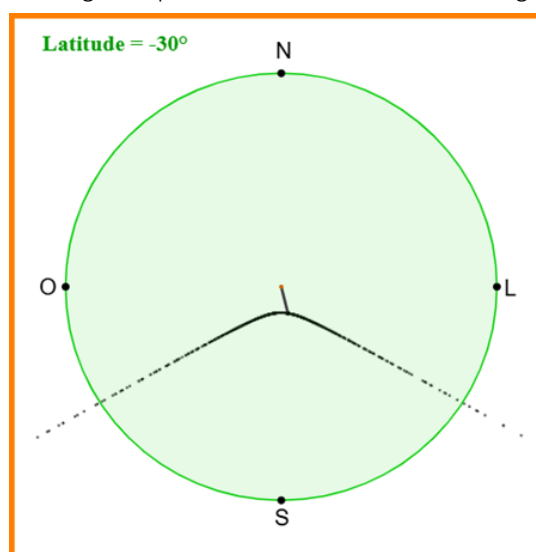


Fonte: elaborado pelos autores com o *software* GeoGebra.

A figura 6b mostra a superfície cônica sendo gerada pelo deslocamento diário do Sol na esfera celeste. Assim, as cônicas são geradas na intersecção entre a superfície cônica e o plano do horizonte, como mostra a Figura 7.

¹ Para saber mais sobre o software Geogebra, enquanto um Recurso Educacional Aberto (REA) sugerimos a leitura do capítulo 'REA no Ensino de Astronomia' (Silva *et al.*, 2022b).

Figura 7. Representação de uma cônica gerada pelo movimento da sombra de um gnômon para uma latitude de -30° .

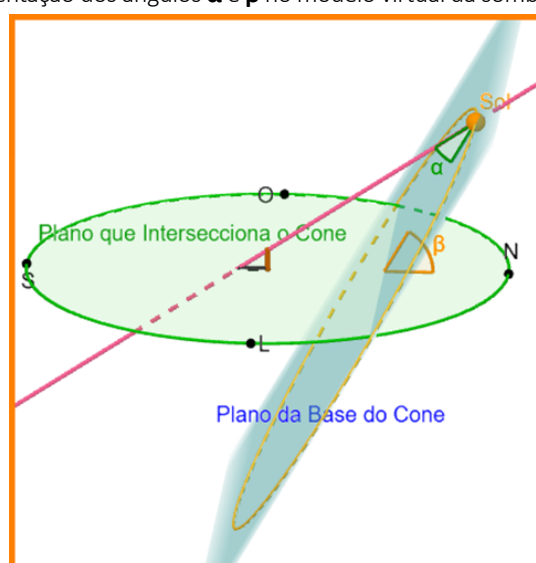


Fonte: elaborado pelos autores com o *software* GeoGebra.

Até o momento, definimos que a curva gerada pela trajetória da sombra de um gnômon sobre uma superfície plana é uma cônica. Agora, precisamos identificar se existe alguma relação entre o tipo de cônica gerado e a latitude local. Para isso, devemos identificar onde estão os ângulos α e β definidos na Figura 4.

Observe na Figura 8 que β é o ângulo formado entre o plano da base do cone (plano que contém a trajetória diária do Sol na esfera celeste) e o plano do horizonte e, α é o ângulo formado entre a reta que representa o raio de luz solar e o plano da base do cone.

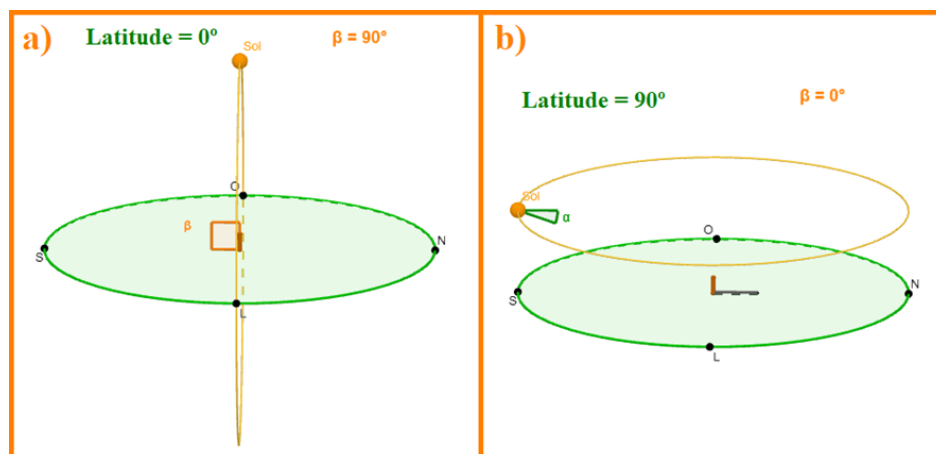
Figura 8. Representação dos ângulos α e β no modelo virtual da sombra de um gnômon.



Fonte: elaborado pelos autores com o *software* GeoGebra.

Perceba, na Figura 9, que o ângulo β é igual a 90° quando a latitude é igual a 0° (Figura 9a). Já quando a latitude é igual a 90° o ângulo β é igual a 0° (Figura 9b). Portanto, o ângulo β é complementar à latitude.

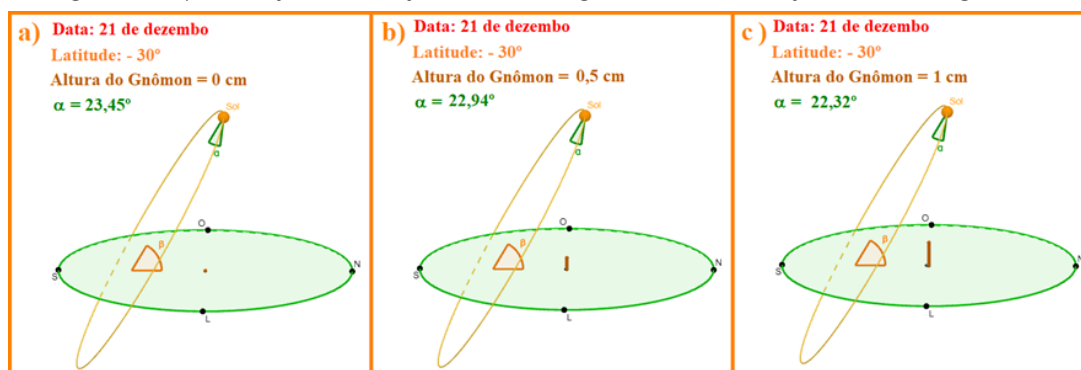
Figura 9. Representação da relação entre o ângulo β e a latitude local.



Fonte: elaborado pelos autores com o *software* GeoGebra.

Conforme verificamos na Figura 10, o valor do ângulo α acaba sofrendo alteração com a mudança na altura do gnômon do modelo virtual.

Figura 10. Representação da alteração sofrida no ângulo α devido à variação da altura do gnômon.

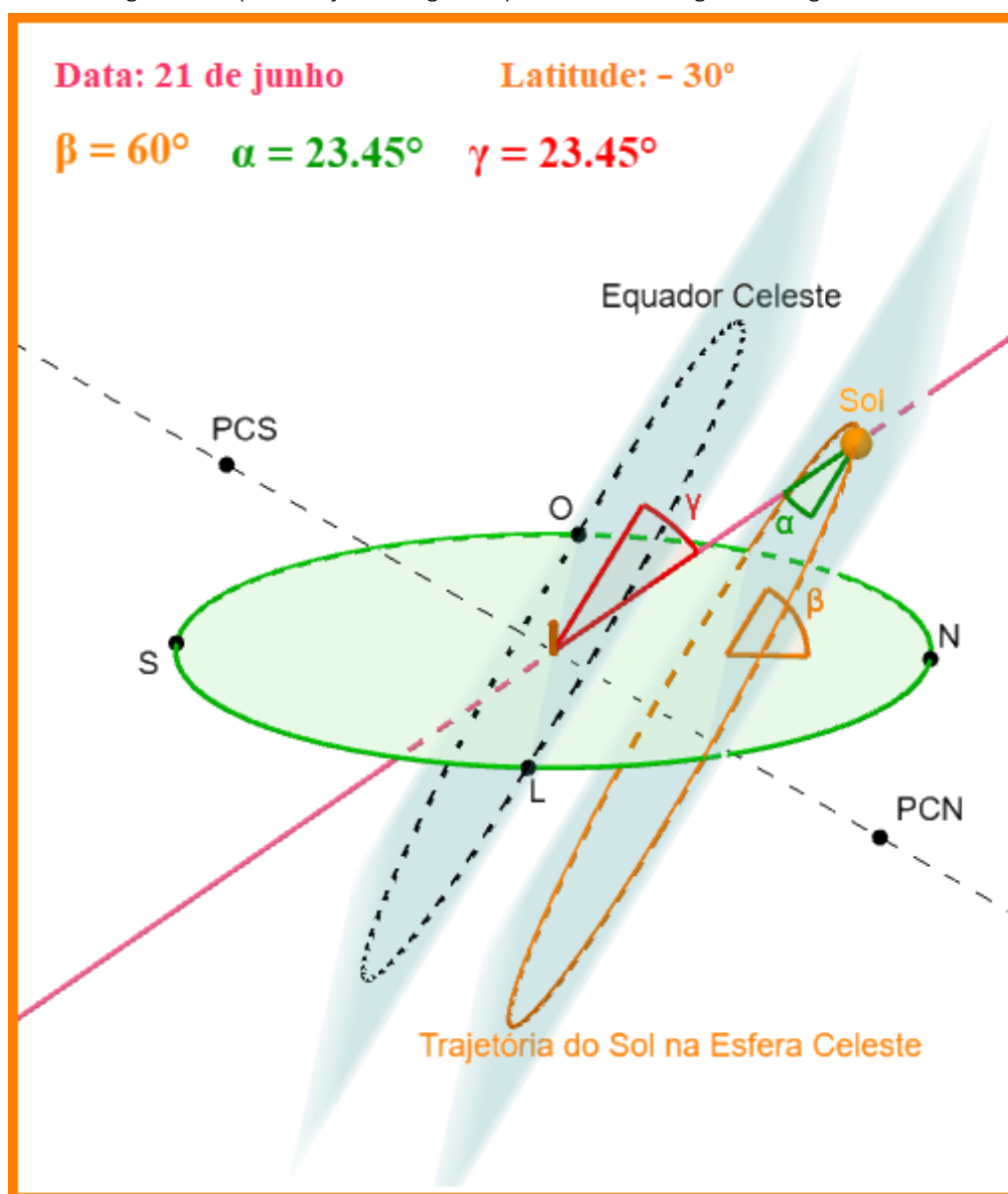


Fonte: elaborado pelos autores com o *software* GeoGebra.

Assim, para encontrar a altura ideal do gnômon que represente o mais fiel possível o comportamento da sombra de um objeto real, precisamos ter uma definição precisa do ângulo α , assumindo um modelo no qual a esfera celeste tem raio igual a 6,2 cm.

Sabendo que a altura do gnômon no modelo virtual deveria estar muito próxima a zero, começamos nossa investigação avaliando como seria o comportamento do ângulo α caso a altura do gnômon, no modelo, fosse igual a zero, conforme a Figura 11.

Figura 11. Representação do ângulo α quando a altura do gnômon é igual a zero.



Fonte: elaborado pelos autores com o *software* GeoGebra.

Quando a altura do gnômon é igual a zero, a reta que representa o raio de Sol passa na base do gnômon. Além disso, sabendo que o plano do equador celeste é paralelo ao plano que contém a trajetória diária do Sol na esfera celeste e aplicando o teorema: ‘Se duas retas paralelas distintas interceptam uma transversal, então os ângulos alternos são congruentes’, temos que o ângulo α é igual à declinação solar (ângulo γ). A declinação (γ) de qualquer corpo celeste parte do equador celeste, no sentido positivo para corpos celestes do hemisfério norte e no sentido negativo para corpos celestes do hemisfério sul. No caso do Sol, sua declinação ao longo do ano varia entre $-23,5^\circ$ e $+23,5^\circ$, aproximadamente.

Desta forma o passo seguinte em nossa investigação foi encontrar a altura do gnômon para o qual o ângulo α é igual à declinação solar (ângulo γ), assim chegamos a altura para o gnômon igual a 0,00005 cm.

Sabendo disso, podemos deduzir os tipos de cônicas formados pela trajetória da sombra de um gnômon vertical em função da latitude local. Antes disso, relembremos alguns conceitos já apresentados até aqui:

- O tipo de cônica formado pela intersecção entre uma superfície cônica e um plano pode ser definido pela relação entre os ângulos α (ângulo formado entre as geratrizes e o plano da base do cone) e β (ângulo formado entre o plano que intercepta a superfície cônica e o plano da base do cone);
- A relação entre os tipos de cônicas e os ângulos α e β é a seguinte: **Circunferência**: quando o plano que intercepta a superfície cônica é paralelo ao plano da base do cone, **Elipse**: $\beta < \alpha$, **Parábola**: $\alpha = \beta$, **Hipérbole**: $\beta > \alpha$;
- No modelo virtual o ângulo β é complementar à latitude e o ângulo α é igual à declinação solar.

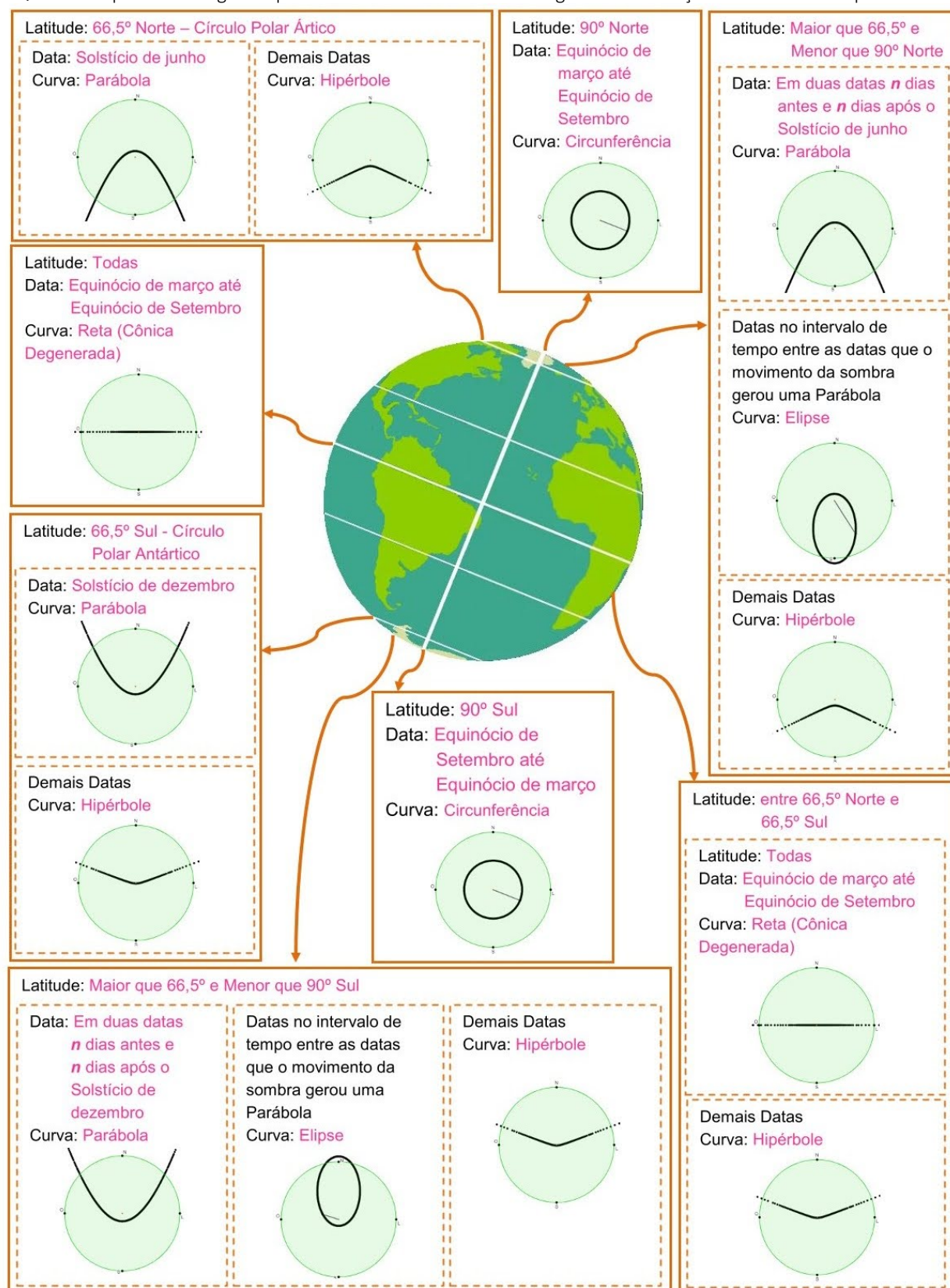
Assim, conforme o Quadro 1, para qualquer localidade inferior a $66,5^\circ$ de latitude, seja ao norte da linha do equador (Círculo Polar Ártico) ou $66,5^\circ$ ao sul da linha do equador (Círculo Polar Antártico), a cônica formada pela trajetória da sombra de um gnômon será uma Hipérbole, exceto nos equinócios que são retas (cônicas degeneradas).

Sobre o Círculo Polar Ártico no Solstício de junho e sobre o Círculo Polar Antártico no Solstício de dezembro a cônica formada pela trajetória da sombra de um gnômon será uma Parábola, isso devido ao fato que nesta data específica do ano a declinação solar é igual ao complemento da latitude. Nas demais datas do ano será uma Hipérbole.

Nas regiões polares, maiores que $66,5^\circ$ e menor que 90° de latitude, a cônica formada pela trajetória da sombra de um gnômon será uma parábola em duas datas específicas, nos dias em que a declinação solar for igual ao complemento da latitude local, no período entre estas duas datas a curva será uma elipse. Nas demais datas a cônica será uma hipérbole. Por exemplo, a cidade de Tromsø localizada na Noruega, latitude de $69,66^\circ$ norte, sendo seu complemento igual a $20,34^\circ$, a curva gerada pela sombra de um gnômon nessa cidade será igual a uma parábola nos dias do ano em que a declinação solar for igual a $20,34^\circ$. Ou seja, para o ano de 2024, isso deve acontecer nos dias 21 de maio e 21 de julho. Nas datas entre 21 de maio e 21 de julho a curva gerada pela sombra do gnômon será uma elipse e nas demais datas do ano a curva será uma hipérbole.

Nos Polos, a 90° de latitude, a cônica formada pela trajetória da sombra de um gnômon será uma circunferência.

Quadro 1. Tipo de cônica gerada pelo movimento da sombra de um gnomon em função da latitude e da época do ano.



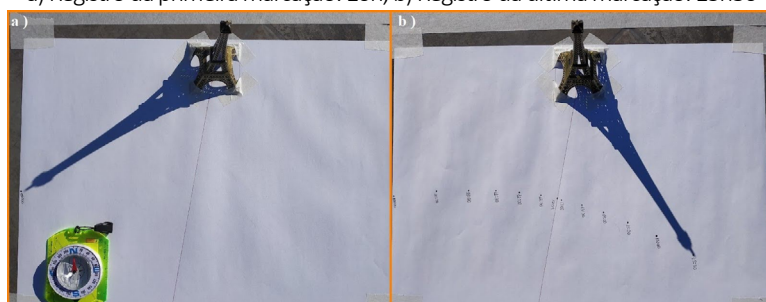
Fonte: elaborado pelos autores com o *software* GeoGebra.

O gnômon real: investigação da curva gerada pela sombra de um gnômon em São Borja-RS

Em 21 de julho de 2021, no município de São Borja-RS, latitude $-28,66^\circ$, realizamos um experimento para determinar o caminho percorrido pela sombra de um gnômon. O método foi o seguinte: fixamos um gnômon (mini torre Eiffel) em uma folha de cartolina, em um local totalmente ensolarado (Figura 12). Assim, enquanto o Sol deslocava-se em seu movimento diário no céu, a cada 30 minutos, fazíamos a marcação de um ponto - sobre exatamente a ponta da sombra do gnômon. Na Figura 12a temos o registro da marcação da primeira sombra, do primeiro ponto, às 10 h da manhã. Na figura 12b, o registro da marcação do último ponto, às 15h30 da tarde. Assim, foram registrados 13 pontos, determinando a trajetória da sombra do gnômon. O experimento foi gravado em vídeo e disponibilizado no YouTube².

Figura 12. fotografia da sombra de um gnômon em São Borja-RS, latitude $-28,66^\circ$.

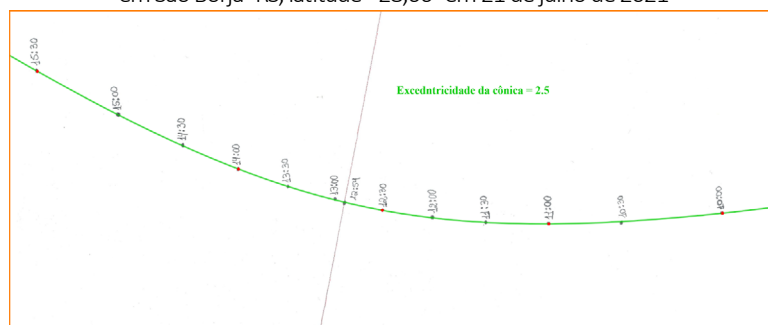
a) Registro da primeira marcação: 10h; b) Registro da última marcação: 15h30



Fonte: elaborado pelos autores.

Assim, ao ligarmos esse conjunto de pontos, notamos que foi gerado uma curva, uma cônica (Figura 13). Após, utilizamos o *software* GeoGebra para determinar que tipo de cônica era essa. O *software* nos retornou uma excentricidade (e) = 2,5, logo, notamos que essa curva é uma hipérbole, confirmando o nosso estudo.

Figura 13. Registro do comportamento da sombra de um gnômon em São Borja-RS, latitude $-28,66^\circ$ em 21 de julho de 2021

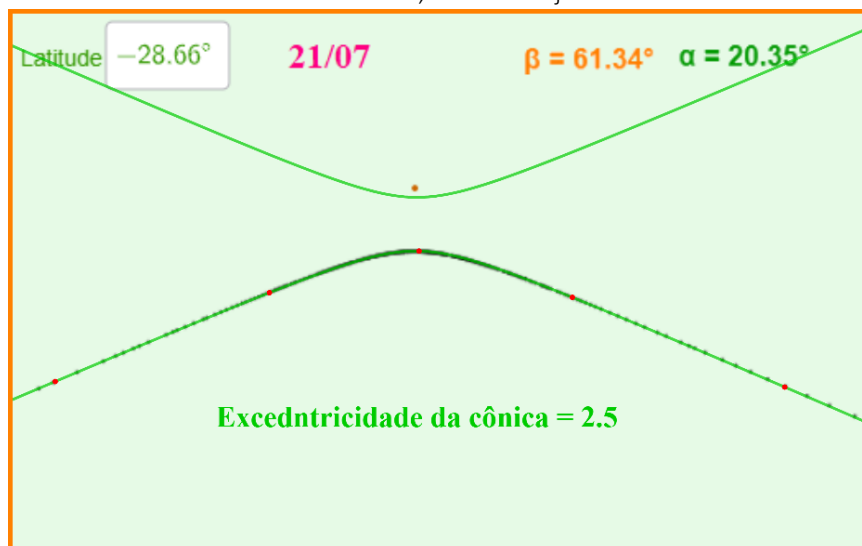


Fonte: elaborado pelos autores.

² Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=m2PENC77sJU>.

Comparando essa curva obtida em São Borja-RS com o gnômon real com outra curva gerada pelo gnômon no modelo virtual, percebemos que a curva gerada pelo modelo virtual possui excentricidade igual à curva gerada pelo gnômon real.

Figura 14. Curva gerada pela sombra do gnômon virtual para São Borja-RS, latitude de $-28,66^\circ$ em 21 de julho.



Fonte: elaborado pelos autores com o *software* GeoGebra.

Conclusão

Ao longo desse texto foi explorada a relação entre a matemática e a astronomia com foco na análise da sombra projetada por um gnômon - o mais antigo instrumento astronômico conhecido.

A discussão abordou a formação de superfícies cônicas e as diferentes cônicas (elipse, parábola e hipérbole) que podem ser geradas a partir da sombra do gnômon, dependendo da sua localização e da inclinação da superfície na qual a sombra é projetada.

Além disso, foi apresentada uma simulação utilizando o *software* GeoGebra, que permitiu visualizar e compreender melhor a dinâmica da sombra do gnômon e sua relação com as cônicas. Essa abordagem teórica e prática ilustra como a matemática e a astronomia estão intrinsecamente conectadas, permitindo uma melhor compreensão dos fenômenos astronômicos.

Por fim, a investigação realizada com um gnômon real em São Borja-RS reforçou a aplicabilidade desses conceitos na observação e análise de dados astronômicos concretos. Essa integração entre a teoria e a prática é fundamental para o avanço do conhecimento nessas áreas.

Em conclusão, este texto destacou a importância da compreensão da relação entre a sombra do gnômon e as cônicas, revelando como a matemática e a astronomia trabalham em conjunto para explicar e descrever os fenômenos celestes. Essa abordagem interdisciplinar enriquece a nossa compreensão do universo e abre caminhos para futuras descobertas e aplicações práticas.

Referências

- BOYER, Carl B. **História da Matemática**. Tradução de Elza F. Gomide. 2 ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC/CNE, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 10 abr. 2022.
- CATELLI, F.; GIOVANNINI, O.; BORTOLINI, J.; SILVA, F. S. da. A sombra de um gnômon ao longo do ano em diferentes lugares do planeta. **Revista Latino-Americana de Educação em Astronomia**, São Carlos, n. 34, p. 39-57, 2023. Disponível em: <https://doi.org/10.37156/RELEA/2022.34.039>. Acesso em: 28 jun. 2024.
- DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de Geometria Elementar: Geometria Plana**. 8. ed. São Paulo: Atual, 2005.
- HOGBEN, L. **Maravilhas da Matemática: Influência e função da matemática nos conhecimentos humanos**. Porto Alegre: Globo, 1970.
- OURIQUE, Pedro Antônio. **Observação do Movimento da Sombra em São Borja-RS – Brasil**. YouTube, 29 out. 2023. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=m2PENC77sJU>. Acesso em: 30 jun. 2024.
- OURIQUE, Pedro Antônio. **Superfície Cônica**. Geogebra, 20 maio 2024. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/csauwrww>. Acesso em: 30 jun. 2024.
- OURIQUE, Pedro Antônio. **Cônicas**. Geogebra, 8 maio 2024. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/vn57kvnq>. Acesso em: 30 jun. 2024.
- OURIQUE, Pedro Antônio. **Sombra de um gnômon**. Geogebra, 15 jul. 2024. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/qdvjqvuk>. Acesso em: 17 jul. 2024.
- PETERSEN, James F. **Fundamentos de geografia física**. São Paulo: Cengage Learning, 2014.
- SANTOS, Fabiano J.; FERREIRA, Silvimar F. **Geometria analítica**. Porto Alegre: Bookman, 2009.
- SILVA, Fernando Siqueira da; CATELLI, Francisco; DUTRA, Carlos Maximiliano. Geometria solar na escola: uma prática com cartas solares. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 43, 2021. Disponível em: <https://doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2020-0520>. Acesso em: 12 maio 2022.
- SILVA, Fernando Siqueira da; OURIQUE, Pedro Antônio; CATELLI, Francisco; MACHADO, Michel Mansur; DUTRA, Carlos Maximiliano. REA no Ensino de Astronomia. In: MACHADO, M. M.; DUTRA, C. M.; RUPPENTHAL, R. (Org.). **Grupos de Pesquisa em Ação: Contribuições para o Desenvolvimento da Educação Científica**. Curitiba: Editora CRV, 2022. Disponível em: <https://www.editoracrv.com.br/uploads/pdfs/1659642222-grupos-de-pesquisa-em-acao.pdf>. Acesso em: 20 jan. 2024.
- WINTERLE, Paulo. **Vetores e geometria analítica**. São Paulo: Makron Books, 2000.